Основы теории графов

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Разложение графов

Объединение графов (V', E') и (V'', E'') — это граф

$$(V' \cup V'', E' \cup E'')$$

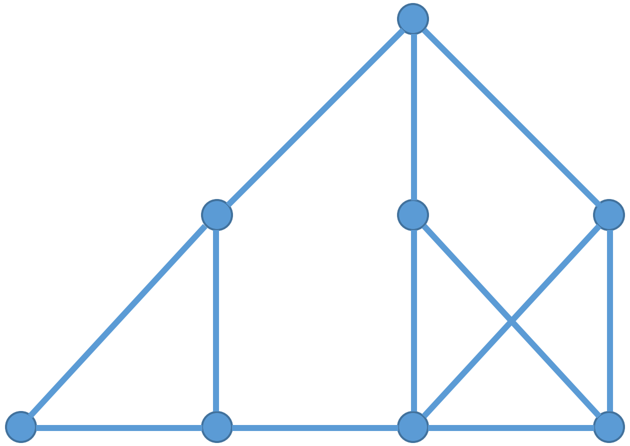
Похожие, но разные задачи:

- Представить граф G в виде объединения графов из класса $\mathcal{G}$
- Представить граф G в виде объединения графов из класса $\mathcal{G}$, не пересекающихся по рёбрам
- Покрыть G графами из $\mathcal{G}$
- Упаковать в G графы из $\mathcal{G}$

Факторизация графов

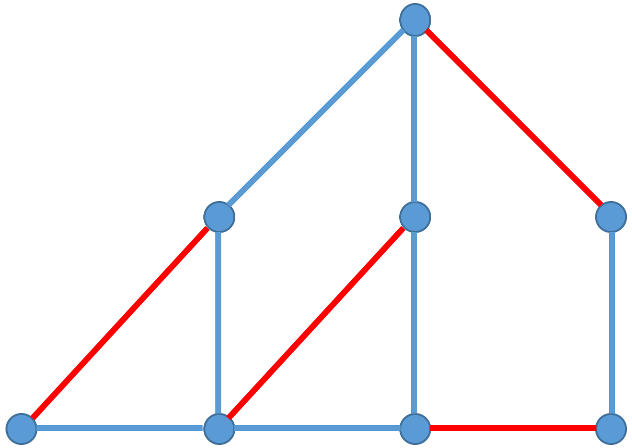
- k-регулярный граф — это такой граф, все степени вершин в котором равны k

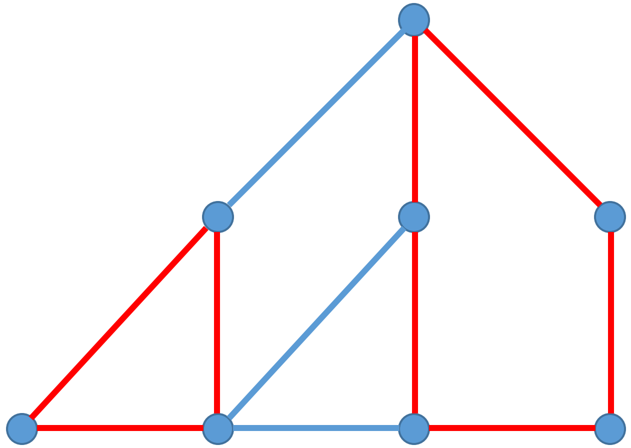
- 1-регулярный граф — это *паросочетание*



Факторизация графов

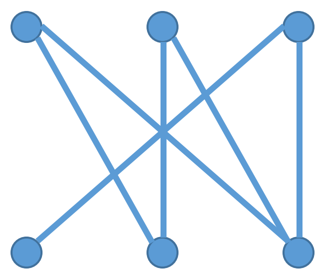
- k-фактор графа — это его остовный k-регулярный подграф
- 1-фактор называют также *совершенным паросочетанием*
- Граф является k-*факторизуемым*, если его можно разложить на непересекающиеся k-факторы





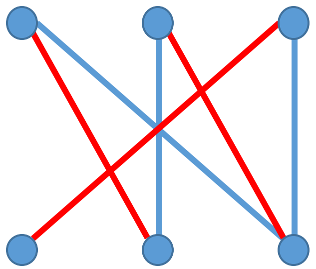
Двудольные графы

- Двудольный граф — это граф, вершины которого можно разбить на два независимых множества
- Двудольный граф — это модель соответствия между двумя множествами объектов. Например, между работниками и работодателями (ребро проводится, если работник подходит работодателю):



Паросочетания в двудольных графах

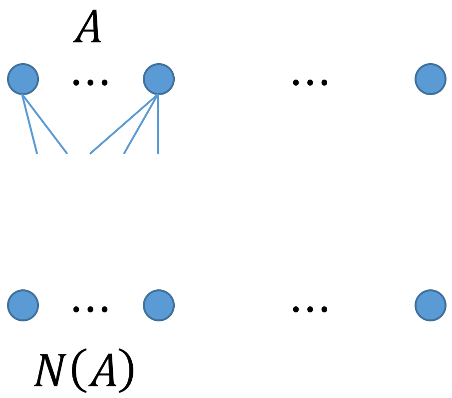
- Двудольный граф — это модель соответствия между двумя множествами объектов. Например, между работниками и работодателями.
- Совершенное паросочетание в двудольном графе — это фактически однозначное сопоставление пар вершин из разных долей



Паросочетания в двудольных графах

- Когда в двудольном графе существует 1-фактор?
- Необходимое условие: для любого множества вершин A из первой доли число их соседей $|N(A)|$ во второй доле должно быть не меньше размера самого множества A:

$$|N(A)| \geq |A|$$

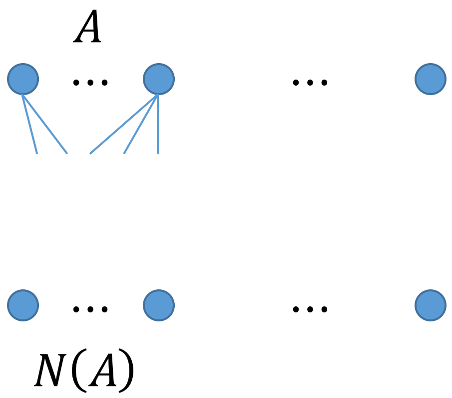


1-факторы в двудольных графах

Теорема Холла. Условие

$$\forall A \subseteq V_1 \quad |N(A)| \geq |A|$$

является необходимым и достаточным для существования 1-фактора в двудольном графе с равномощными долями V_1, V_2.



1-факторы в двудольных графах

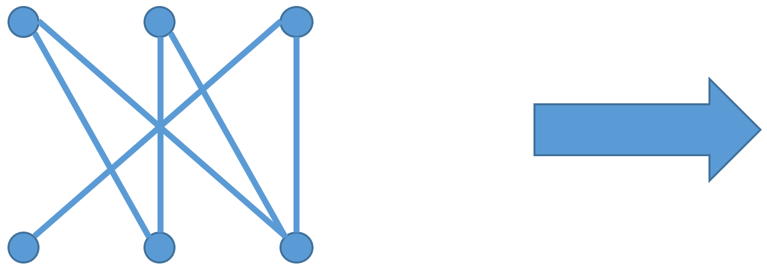
Требуется доказать, что если $\forall A \subseteq V_1$
$$|N(A)| \geq |A|,$$
то в графе найдётся 1-фактор.

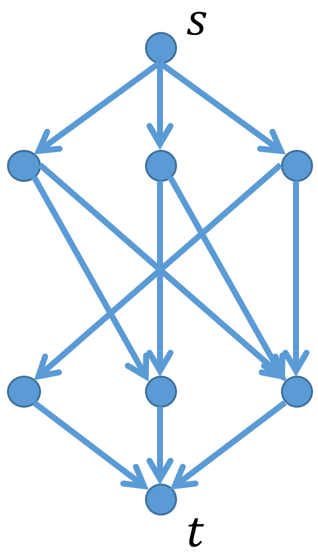
Применим теорему Форда—Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. По исходному графу строим сеть:

- Ориентируем все рёбра от V_1 к V_2
- Добавляем новые вершины s и t
- Проводим дуги из s во все вершины V_1 и из всех вершин V_2 в t
- Пропускные способности всех дуг равны 1

1-факторы в двудольных графах

- Ориентируем все рёбра от V_1 к V_2
- Добавляем новые вершины s и t и проводим дуги из s во все вершины V_1 и из всех вершин V_2 в t





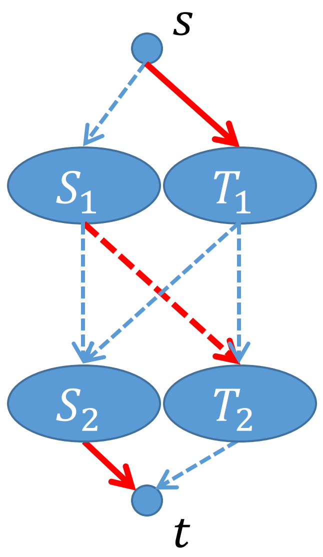
- В полученной сети есть поток величины $|V_1|$ т. и т.т., когда в исходном графе есть 1-фактор

1-факторы в двудольных графах

- Остаётся доказать, что если $\forall A \subseteq V_1$
$$|N(A)| \geq |A|,$$
то в построенной по графу сети пропускная способность любого разреза не меньше $|V_1|$.
- Пусть $S \sqcup T$ — произвольный разрез. Введём обозначения: $S_i = S \cap V_i$ и $T_i = T \cap V_i$.
- При этом
$$S = \{s\} \cup S_1 \cup S_2, \qquad T = \{t\} \cup T_1 \cup T_2$$

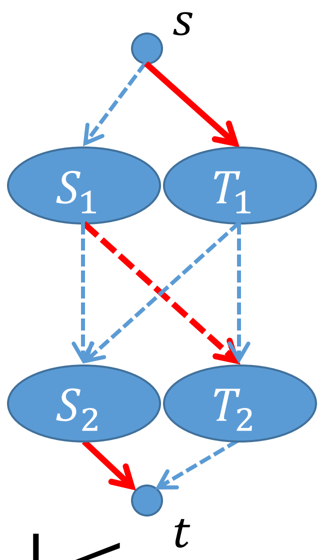
1-факторы в двудольных графах

- $S = \{s\} \cup S_1 \cup S_2, \quad T = \{t\} \cup T_1 \cup T_2$
- Пропускная способность разреза $S \sqcup T$ равна количеству дуг, ведущих из S в T, а оно равно
$$|\mathrm{T}_1| + |S_2| + (\text{\#дуг из } S_1 \text{ в } T_2)$$
- Осталось показать, что эта величина не меньше $|V_1|$, т.е. доказать неравенство
$$|\mathrm{T}_1| + |S_2| + (\text{\#дуг из } S_1 \text{ в } T_2) \geq |V_1|$$



1-факторы в двудольных графах

- Неравенство
  $|\mathrm{T}_1| + |S_2| + (\#\text{дуг из } S_1 \text{ в } T_2) \geq |V_1|$
  эквивалентно неравенству
  $|S_2| + (\#\text{дуг из } S_1 \text{ в } T_2) \geq |S_1|$



- Из условия теоремы следует:
  $|S_1| \leq |N(S_1)| = |N(S_1) \cap S_2| + |N(S_1) \cap T_2| \leq$
  $\leq |S_2| + (\#\text{дуг из } S_1 \text{ в } T_2)$, что и требовалось

1-факторизация двудольных графов

Итак, мы доказали, что если выполнено

$$\forall A \subseteq V_1 \quad |N(A)| \geq |A|$$

то в соответствующем двудольном графе существует 1-фактор.

1-факторизация двудольных графов

Теорема (D. Kőnig). Двудольный граф является 1-факторизуемым т. и т.т., когда он регулярен.

Док-во факторизуемости регулярного графа:

- Из регулярности графа следует равенство $|V_1| = |V_2|$
- В k-регулярном графе для любого $A \subseteq V_1$
$$\left(\#\text{рёбер из } A \text{ в } N(A)\right) = |A| \cdot k$$
- При этом т.к. в одну вершину из $N(A)$ входит не более чем k рёбер из A, то
$$|N(A)| \geq \frac{1}{k} \cdot \left(\#\text{рёбер из } A \text{ в } N(A)\right) = |A|$$

1-факторизация двудольных графов

Теорема (D. Kőnig). Двудольный граф является 1-факторизуемым т. и т.т., когда он регулярен.

Док-во факторизуемости регулярного графа:

- Итак, условия существования 1-фактора выполнены. Удалив из графа произвольный 1-фактор, получаем $(k-1)$-регулярный граф, и для этого графа повторяем рассуждения…
- В итоге получим 1-регулярный граф, который является своим собственным 1-фактором
- Объединение всех полученных 1-факторов и будет 1-факторизацией первоначального графа

2-факторизация графов

Теорема (J. Petersen). Граф является 2-факторизуемым т. и т.т., когда он $2k$-регулярен для некоторого k.

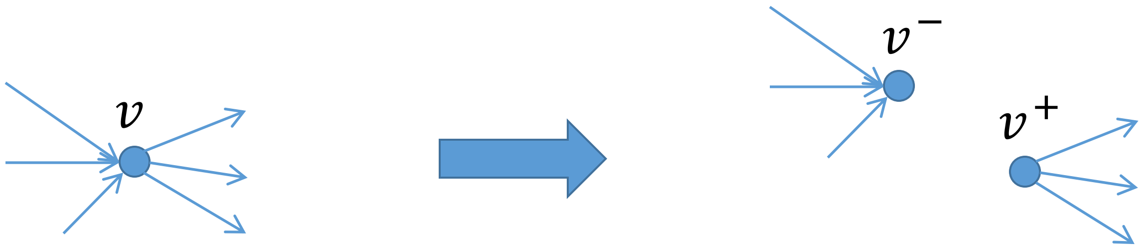
Доказательство:

- Будем доказывать теорему только для связных графов
- В связном графе, все вершины которого имеют чётные степени, есть Эйлеров цикл
- Сориентируем все рёбра графа в том направлении, в котором они проходятся в этом цикле — получим орграф, в котором
$$\forall v \in V \quad d^-(v) = d^+(v) = k$$

2-факторизация графов

Продолжение доказательства:

- Теперь каждую вершину v «расщепляем» на пару вершин v^-, v^+, так, что v^- «наследует» все входящие в v дуги, а v^+ «наследует» все исходящие из v дуги:



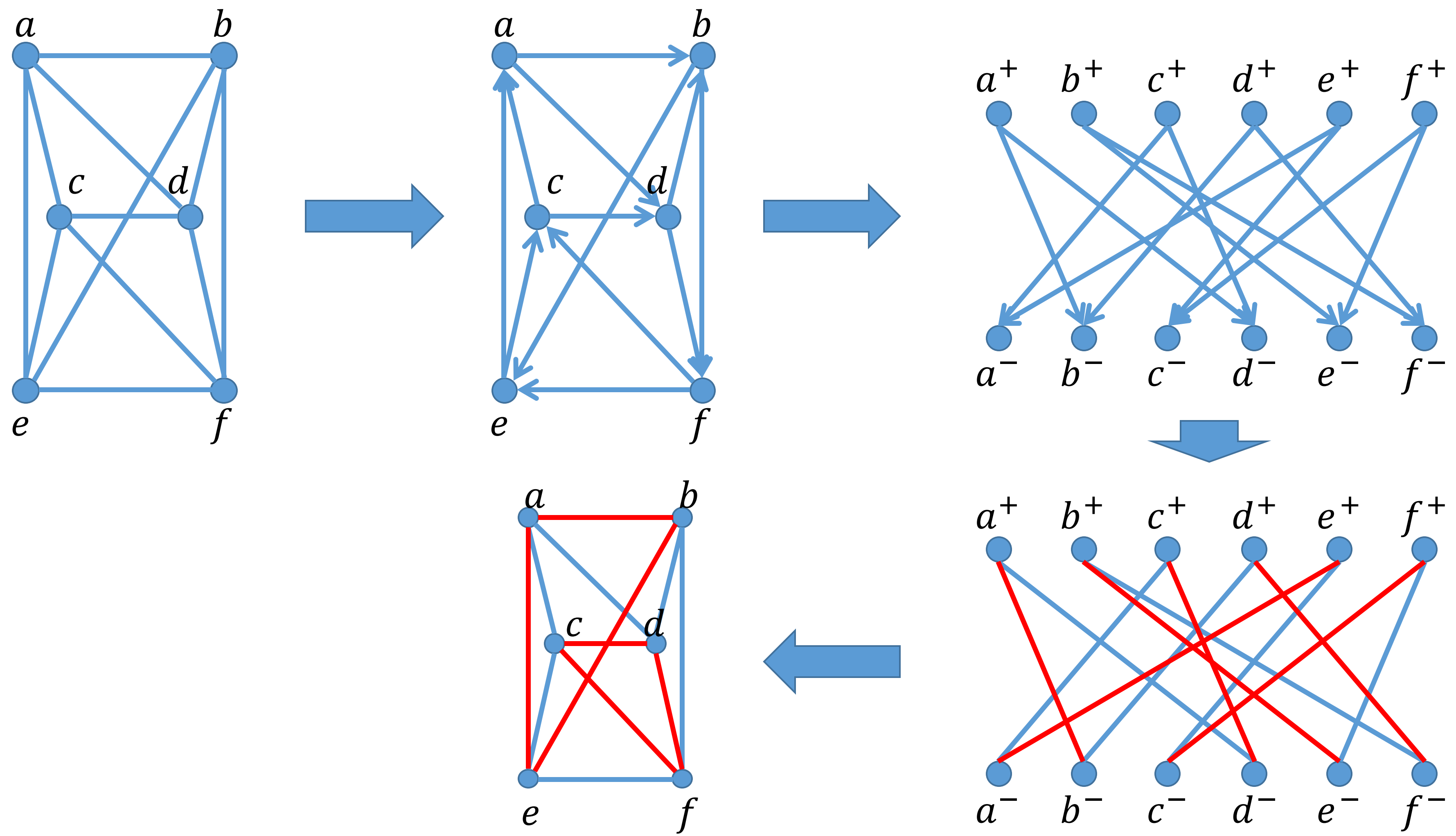
2-факторизация графов

Завершение доказательства:

- Если в новом «расщеплённом» орграфе «забыть» про ориентацию дуг, получим двудольный k-регулярный граф
- Этот граф допускает 1-факторизацию. При этом каждый 1-фактор в нём соответствует 2-фактору в первоначальном графе.

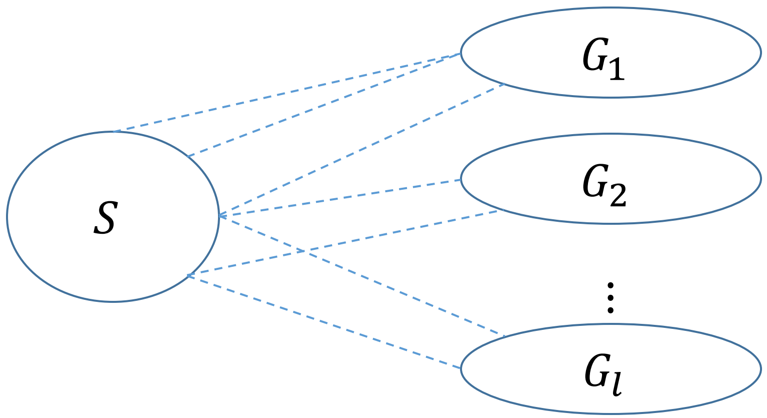
2-факторизация графов

Пример (эйлеров цикл $abfeadbecdfca$)



Теорема Татта об 1-факторе

- Когда в недвудольном графе существует 1-фактор?
- Пусть $S \subseteq V$ — произвольное подмножество, и $G_1, \dots, G_l$ — компоненты связности графа $(G - S)$



- Фактора точно **не будет**, если среди $G_1, \dots, G_l$ более чем $|S|$ компонент с нечётным числом вершин.

Теорема Татта об 1-факторе

Пусть $q(G - S)$ — количество компонент связности в $(G - S)$ с нечётным числом вершин.

Теорема (W. T. Tutte ’1947).
В графе G есть 1-фактор т. и т.т., когда

$$\forall S \in V(G) \qquad q(G - S) \leq |S|$$

Доказательство:
Необходимость тривиальна. Докажем достаточность.

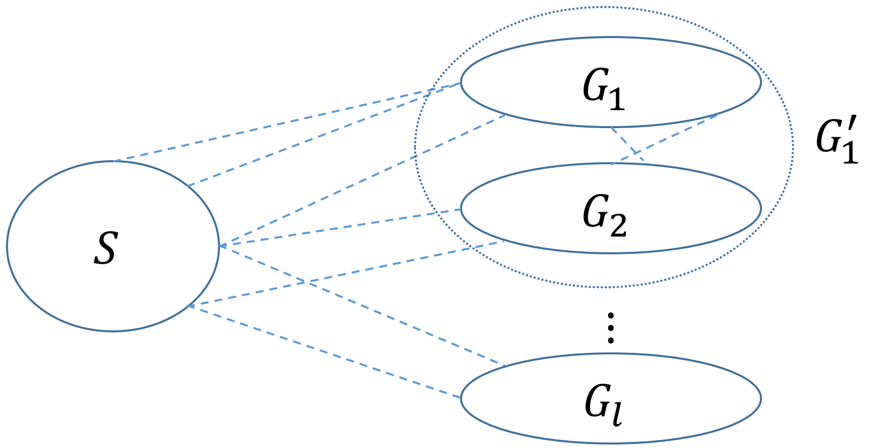
Пусть в G нет 1-фактора.
Покажем, что для некоторого *плохого* S условия Татта нарушены.

Будем считать, что $|G|$ чётно (иначе тривиально: $S = \emptyset$).

Компоненты с нечётным числом вершин назовём *нечётными*.

Доказательство теоремы Татта: переходим к максимальному графу

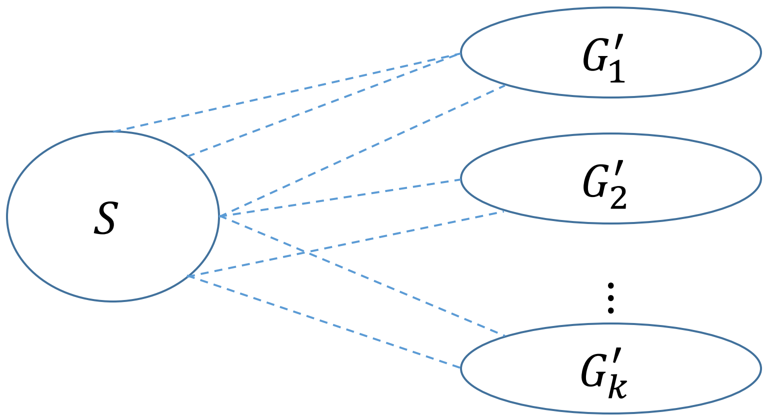
- Будем, пока можем, добавлять в G рёбра, так, чтобы по-прежнему не находился 1-фактор. Получится граф G'.
- В G' нет 1-фактора, но $\forall e \notin E(G')$ в $(G' + e)$ есть 1-фактор.
- Если какое-то S плохое для G', то оно плохое и для G, т.к. каждая нечётная компонента $(G' - S)$ суть объединение нескольких компонент $(G - S)$, хотя бы одна из которых нечётна.



Доказательство теоремы Татта: переходим к максимальному графу

Если S — плохое множество для G', то выполнены свойства:

- Каждая из компонент в $(G' - S)$ — клика.
- Каждая вершина $v \in S$ соединена со всеми вершинами в $V \setminus \{v\}$.

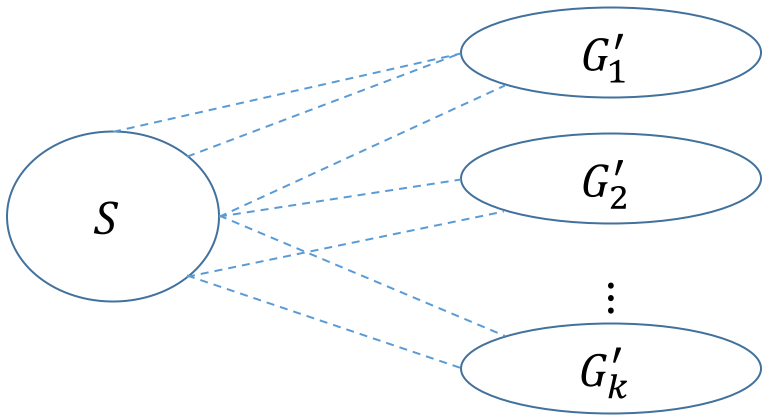


Доказательство теоремы Татта: переходим к максимальному графу

Верно и обратное: если в G' нет 1-фактора, и $S \subseteq V$ таково, что

- каждая из компонент в $(G' - S)$ — клика,
- каждая вершина $v \in S$ соединена со всеми вершинами в $V \setminus \{v\}$,

то S плохое для G'.



Доказательство теоремы Татта

Итак, достаточно доказать, что если G' таков, что

- В G' нет 1-фактора,
- для любого $e \notin E(G')$ в $(G - e)$ есть 1-фактор,

то в G' есть S, такое, что

- каждая из компонент в $(G' - S)$ — клика,
- каждая вершина $v \in S$ соединена со всеми вершинами в $V \setminus \{v\}$.

Доказательство теоремы Татта

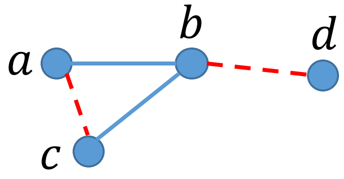
Положим $S \coloneqq \{v \in V \mid \deg v = |G'| - 1\}$.

Предположим, что хотя бы одна из компонент $(G' - S)$ не клика,
и придём к противоречию.

Пусть a, a' — пара несмежных вершин *из одной и той же компоненты* $(G' - S)$.

Пусть abc … — последовательность вершин на кратчайшем пути из a в a' (быть может, $c = a'$).

Т.к. $b \notin S$, то $\exists d \in V \setminus \{a, b, c\}$, такая, что $bd \notin E(G')$.

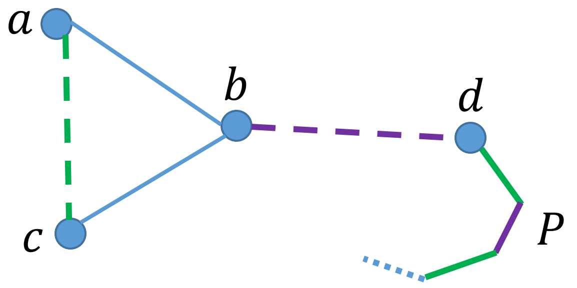


Доказательство теоремы Татта: максимальная чередующаяся цепь

По построению G',

- в графе $(G' + ac)$ есть паросочетание M_{ac},
- в графе $(G' + bd)$ есть паросочетание M_{bd}.

Пусть $P = d \ldots$ — максимальная цепь в G' содержащая попеременно рёбра из M_{ac} и M_{bd} (начиная с M_{ac}).



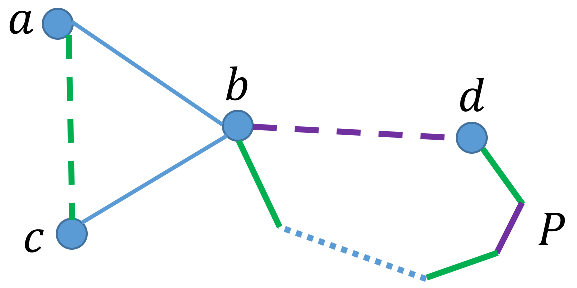
Доказательство теоремы Татта: максимальная чередующаяся цепь

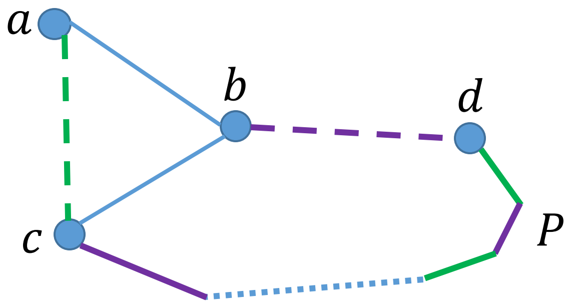
В $(G' + ac)$ есть паросочетание M_{ac}, в $(G' + bd)$ есть M_{bd}.

Пусть $P = d \ldots$ — максимальная цепь в G' содержащая попеременно рёбра из M_{ac} и M_{bd}.

- Если последнее ребро в P из M_{ac}, то P заканчивается на b.
- Если последнее ребро в P из M_{bd}, то P заканчивается на a или c.

(Иначе P можно было бы продолжить.)



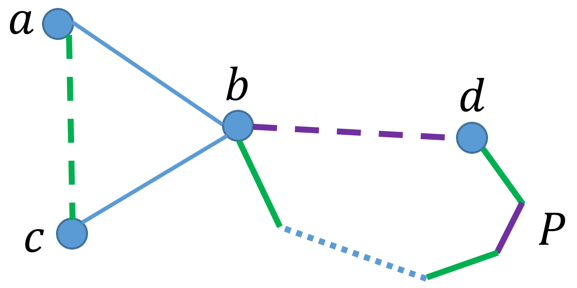


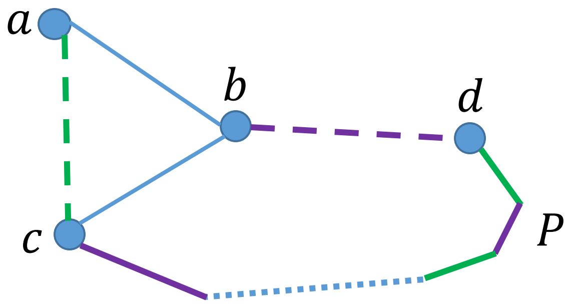
Доказательство теоремы Татта: локальная замена рёбер в M_{bd}

- Если последнее ребро в P из M_{ac}, то P заканчивается на b. Тогда рассмотрим цикл $C \coloneqq P \cup \{bd\}$ в графе $(G' + bd)$
- Если последнее ребро в P из M_{bd}, то P заканчивается б.о.о. на c. Тогда положим $C \coloneqq P \cup \{cb, bd\}$.

В любом случае, в C — каждое второе ребро из M_{bd}.

Заменим в M_{bd} рёбра, лежащие на C, на остальные рёбра C. Получится паросочетание в G' — противоречие.





Теоремы Анселя и Грэхема—Поллака

Теорема. (G. Hansel ’1964).
Если $G_1 \cup \dots \cup G_m = K_n$, где графы $G_1, \dots, G_m$ двудольные, то

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|G_k|}{n} \geq \log_2 n\,.$$

В частности, $m \geq \log_2 n$.

Теорема. (R. L. Graham, H. O. Pollack ’1971)
Пусть $G_1 \cup \dots \cup G_m = K_n$, где $G_1, \dots, G_m$ — полные двудольные, не пересекающиеся по рёбрам. Тогда $m \geq n - 1$.

Доказательство теоремы Анселя

Пусть $G_1 \cup \cdots \cup G_m = K_n$, где графы $G_1, \ldots, G_m$ — двудольные без изолированных вершин.

Пусть $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Пусть
$$m_i \coloneqq \#\{k \mid v_i \in V(G_k)\}$$

Пусть в каждом из $G_1, \ldots, G_m$ выбрана случайно одна из долей, и все вершины доли помечены.

Для каждого i имеем
$$\Pr\{v_i \text{ осталась непомеченной}\} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m_i}$$

Доказательство теоремы Анселя

Для каждого i имеем

$$\Pr\{v_i \text{ осталась непомеченной}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m_i}$$

По линейности матожидания,

$$\mathbb{E}\,\#\text{непомеченных вершин} = \sum_{i=1}^{n} 2^{-m_i}$$

Непомеченной может остаться максимум одна вершина (т.к. для любой пары вершин есть G_k, у которого они в разных долях), отсюда

$$\mathbb{E}\,\#\text{непомеченных вершин} \leq 1$$

Доказательство теоремы Анселя

Имеем

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} 2^{-m_i} \geq n \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{-m_i} \right)^{1/n} = n \cdot 2^{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Отсюда

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \geq \log_2 n$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{k=1}^{m} |G_k|$$

Доказательство теоремы Грэхема—Поллака

Пусть $G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_m = K_n$, где $G_1, \dots, G_m$ — полные двудольные, не пересекающиеся по рёбрам.

Пусть $V(K_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Сопоставим каждому ребру K_n формальное произведение $x_i x_j$.

Пусть L_k и R_k — доли графа G_k. Имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{x_i \in L_k} x_i \right) \left(\sum_{x_i \in R_k} x_i \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

Предположим, что $m \le n - 2$ и придём к противоречию.

Доказательство теоремы Грэхема—Поллака

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{x_i \in L_1} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{x_i \in L_m} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \end{cases}$$

Т.к. $m \leq n - 2$, то у неё есть нетривиальное решение $c_1, \ldots, c_n$, где

$$c_1^2 + \cdots + c_n^2 > 0$$

Доказательство теоремы Грэхема—Поллака

Для $c_1, \dots, c_n$ имеем

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} c_i c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{x_i \in L_k} c_i\right)}_{=0} \left(\sum_{x_i \in R_k} c_i\right) > 0$$

— противоречие!